EXERCICE N°3 :	60'	7 points	

A– Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (Unité graphique :3cm).

1°) Dresser le tableau de variation de *f*.

2°) Ecrire une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point O.

3°) Soit *h* la fonction définie sur *IR* par $h(x)=\dfrac{x}{2}-f(x)$.

a) Montrer que pour tout *x* de *IR*, $h'(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$.

b) Calculer $h(0)$ et en déduire le signe de $h(x)$ pour $x\in IR$.

c) Préciser la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à T. En déduire que O est un point d'inflexion pour $\mathscr{C}$.

4°) Tracer dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe $\mathscr{C}$ et T.

5°) a) Montrer que *f* admet une fonction réciproque f^{-1}.

b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x\in\left]-1,1\right[$.

c) Tracer dans le même repère orthonormé la courbe $\mathscr{C}'$ représentative de f^{-1}.

6°) a) Montrer que pour tout $x\in IR$, $f(x)=1+\dfrac{2\bar{e}^x}{1+\bar{e}^x}$.

b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en cm² de la partie du plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation x = ln2.

c) En déduire l'aire en cm² de la partie du plan limité par la courbe $\mathscr{C}'$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation y = ln2

B– On pose pour tout $x\in IR$, $H(x)=\dfrac{x^2}{4}-\int_0^x f(t)dt$.

1°) Montrer que *H* est la primitive de *h* sur *IR* qui s'annule en zéro.

2°) a) Montrer que pour tout $x\in IR$, $H(x)=\dfrac{x^2}{4}+x-2\ln\left(\dfrac{1+2e^x}{2}\right)$.

b) Montrer que pour tout $x\in IR$, $H(x)=\dfrac{x^2}{4}-x-\ln\left(\dfrac{1+2e^{-x}+e^{-2x}}{4}\right)$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}H(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de *H*.

C– Soit (I_n) la suite définie sur IN^* par : $I_n=\int_0^{\frac{1}{2}}t^n f^{-1}(t)\,dt$.

1°) a) Montrer que (I_n) est minorée par zéro.

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante ; en déduire que (I_n) est convergente.

2°) a) Démontrer que pour tout $t\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$, et pour tout $n\in IN^*$ on a: $0\le t^n f^{-1}(t)\le\dfrac{\ln 3}{2^n}$.

b) Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$.

Qarray.tn - Agra Blech - Qarray.tn - Agra Blech - Qarray.tn